

### III. REDUKSI GANJIL-GENAP/REDUKSI SIKLIS

#### 3.1. Algoritma Sequensial

##### Contoh 9.2

Selesaikan sistem persamaan berikut :

$$\begin{aligned}16x_1 + 4x_2 &= 8 \\4x_1 + 11x_2 - 5x_3 &= 7 \\2x_2 + 14x_3 - 6x_4 &= 13 \\5x_3 + 18x_4 &= 24\end{aligned}$$

**Jawab**

Vektor  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$  diperoleh melalui prosedur berikut :

1. eliminasi  $x_1$  pada persamaan *kedua* dengan menggunakan persamaan *pertama* sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned}16x_1 + 4x_2 &= 8 \\10x_2 - 5x_3 &= 5 \\2x_2 + 14x_3 - 6x_4 &= 13 \\5x_3 + 18x_4 &= 24\end{aligned}$$

2. ulangi langkah (1) untuk  $x_2$  pada persamaan ketiga dan  $x_3$  pada persamaan keempat. Hasilnya adalah :

$$\begin{aligned}16x_1 + 4x_2 &= 8 \\10x_2 - 5x_3 &= 5 \\15x_3 - 6x_4 &= 12 \\20x_4 &= 20\end{aligned}$$

3. selesaikan persamaan terakhir, dimulai dari penyelesaian  $x_4$  pada persamaan keempat.

Dengan cara ini maka diperoleh :

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [0.225 \ 1.100 \ 1.200 \ 1.000]^T$$

Sistem di atas dapat dituliskan sebagai  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , dimana :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & & & \\ 4 & 11 & -5 & & \\ & 2 & 14 & -6 & \\ & & 5 & 18 & \\ & & & & \end{bmatrix} = \text{matriks tridiagonal, } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 13 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Untuk sistem tridiagonal berukuran  $n$  prosedur di atas dapat digeneralisasi menjadi algoritma sekuensial berikut :

**Algoritma 9.3.** TRIDIAGONAL.SYSTEM.SOLVER (SISD) :

```

Global       $n$                                 {ukuran sistem}
             $f[2..n], g[1..n], h[1..(n-1)]$  {elemen matriks  $\mathbf{A}$ }
             $b[1..n]$                           {elemen vektor  $\mathbf{b}$ }
             $x[1..n]$                           {elemen vektor  $\mathbf{x}$ }

1. begin
2.   for  $i \leftarrow 1$  to  $n-1$  do
3.      $g[i+1] \leftarrow g[i+1] - (f[i+1] / g[i]) \times h[i]$ 
4.      $b[i+1] \leftarrow b[i+1] - (f[i+1] / g[i]) \times b[i]$ 
5.   endfor
6.   for  $i \leftarrow n$  downto 2 do
7.      $x[i] \leftarrow b[i] / g[i]$ 
8.      $b[i-1] \leftarrow b[i-1] - x[i] \times h[i-1]$ 
9.   endfor
10.   $x[1] \leftarrow b[1] / g[1]$ 
11. end

```

Algoritma 9.3. mengandung 2 loop masing-masing dengan  $n-1$  iterasi. Setiap iterasi memerlukan waktu yang tetap. Kompleksitas algoritma dengan demikian adalah  $\Theta(n)$ .

### 3.2. Potensi Paralelisasi

Perhatikan dua matriks berikut :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} g_1 & h_1 & & & \\ f_2 & g_2 & h_2 & & \\ & f_3 & g_3 & h_3 & \\ & & f_4 & g_4 & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} g_1^{(1)} & h_1^{(1)} & & & \\ f_2^{(1)} & g_2^{(1)} & 0 & & \\ & 0 & g_3^{(1)} & h_3^{(1)} & \\ & & f_4^{(1)} & g_4^{(1)} & \end{bmatrix}$$

Matriks  $\mathbf{A}^{(1)}$  adalah hasil transformasi dari matriks  $\mathbf{A}$ . Matriks  $\mathbf{A}^{(1)}$  terdiri dari dua matriks tridiagonal yang saling lepas sehingga penyelesaian kedua bagian vektor  $\mathbf{x}$  dapat dilakukan secara serempak.

### 3.3. Algoritma Paralel

Algoritma paralel dibangun untuk mentransformasikan matriks  $\mathbf{A}$  menjadi  $\mathbf{A}^{(1)}$ . Pola umum struktur matriks tridiagonal berukuran  $n$  adalah :

$$\begin{aligned} g_1 x_1 + h_1 x_2 &= b_1 \\ f_i x_{i-1} + g_i x_i + h_i x_{i+1} &= b_i \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ f_n x_{n-1} + g_n x_n &= b_n \end{aligned} \quad (9.4)$$

Untuk  $3 \leq i \leq n-2$ , persamaan  $(i-1)$ ,  $(i)$ , dan  $(i+1)$  adalah :

$$\begin{aligned} f_{i-1} x_{i-2} + g_{i-1} x_{i-1} + h_{i-1} x_i &= b_{i-1} \\ f_i x_{i-1} + g_i x_i + h_i x_{i+1} &= b_i \\ f_{i+1} x_i + g_{i+1} x_{i+1} + h_{i+1} x_{i+2} &= b_{i+1} \end{aligned}$$

Dari persamaan  $(i-1)$  dan  $(i+1)$  dapat diperoleh :

$$x_{i-1} = (1/g_{i-1})(b_{i-1} - f_{i-1} x_{i-2} - h_{i-1} x_i) \quad (9.4a)$$

$$x_{i+1} = (1/g_{i+1})(b_{i+1} - f_{i+1} x_i - h_{i+1} x_{i+2}) \quad (9.4b)$$

Substitusi kedua persamaan ke persamaan  $(i)$  akan menghasilkan :

$$f_i^{(1)} x_{i-2} + g_i^{(1)} x_i + h_i^{(1)} x_{i+2} = b_i^{(1)} \quad (9.5)$$

dimana :

$$f_i^{(1)} = \alpha_i^{(1)} f_{i-1}, \quad g_i^{(1)} = g_i + \alpha_i^{(1)} h_{i-1} + \beta_i^{(1)} f_{i+1} \quad (9.6a)$$

$$h_i^{(1)} = \beta_i^{(1)} h_{i+1}, \quad b_i^{(1)} = b_i + \alpha_i^{(1)} b_{i-1} + \beta_i^{(1)} b_{i+1} \quad (9.6b)$$

$$\alpha_i^{(1)} = -\frac{f_i}{g_{i-1}}, \quad \beta_i^{(1)} = -\frac{h_i}{g_{i+1}} \quad (9.6c)$$

Persamaan (9.6) juga berlaku untuk :  $f_{n-1}^{(1)}, f_n^{(1)}, g_2^{(1)}, g_{n-1}^{(1)}, h_1^{(1)}, h_2^{(1)}$ ,

kecuali untuk :

$$g_1^{(1)} = g_1 + \beta_1^{(1)} f_2 \quad \text{dan} \quad g_n^{(1)} = g_n + \alpha_n^{(1)} h_{n-1} \quad (9.6d)$$

$$b_1^{(1)} = b_1 + \beta_1^{(1)} b_2 \quad \text{dan} \quad b_n^{(1)} = b_n + \alpha_n^{(1)} b_{n-1} \quad (9.6e)$$

Ungkapan matriks persamaan (9.5) adalah  $\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)}$  yang merupakan transformasi dari  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  dimana :



**Algoritma 9.4. CYCLIC.REDUCTION(SIMD) :**

Global $n$	{ ukuran sistem }
$f[2..n], g[1..n], h[1..(n-1)]$	{ elemen $\mathbf{A}$ }
$b[1..n]$	{ elemen $\mathbf{b}$ }
$f^{(1)}[3..n], g^{(1)}[1..n], h^{(1)}[1..(n-2)]$	{ elemen $\mathbf{A}^{(1)}$ }
$b^{(1)}[1..n]$	{ elemen $\mathbf{b}^{(1)}$ }
$p$	{ # proses }
$\alpha^{(1)}[2..n], \beta^{(1)}[1..(n-1)]$	{ faktor skala }
$x[1..n]$	{ elemen vektor $\mathbf{x}$ }

1. begin
2. for  $i \leftarrow 1$  to  $n-1$  do
3.      $\alpha^{(1)}[i+1] \leftarrow -f[i+1] / g[i]$
4.      $\beta^{(1)}[i] \leftarrow -h[i] / g[i+1]$
5. endfor
6. for  $i \leftarrow 2$  to  $n-1$  do
7.      $f^{(1)}[i+1] \leftarrow \alpha^{(1)}[i+1] \times f[i]$
8.      $g^{(1)}[i] \leftarrow g[i] + \alpha^{(1)}[i] \times h[i-1] + \beta^{(1)}[i] \times f[i+1]$
9.      $h^{(1)}[i-1] \leftarrow \beta^{(1)}[i-1] \times h[i]$
10.     $b^{(1)}[i] \leftarrow b[i] + \alpha^{(1)}[i] \times b[i-1] + \beta^{(1)}[i] \times b[i+1]$
11. endfor
12.  $g^{(1)}[1] \leftarrow g[1] + \beta^{(1)}[1] \times f[2]$
13.  $g^{(1)}[n] \leftarrow g[n] + \alpha^{(1)}[n] \times h[n-1]$
14.  $b^{(1)}[1] \leftarrow b[1] + \beta^{(1)}[1] \times b[2]$
15.  $b^{(1)}[n] \leftarrow b[n] + \alpha^{(1)}[n] \times b[n-1]$
16. forall  $P[j]$  where  $1 \leq j \leq 2$  do
17.     for  $i \leftarrow 2$  to  $n-1$  step 2 do
18.          $g^{(1)}[i+j] \leftarrow g^{(1)}[i+j]$   
                $- (f^{(1)}[i+j] / g^{(1)}[i+j-2]) \times h^{(1)}[i+j-2]$
19.          $b^{(1)}[i+j] \leftarrow b^{(1)}[i+j]$   
                $- (f^{(1)}[i+j] / g^{(1)}[i+j-2]) \times b^{(1)}[i+j-2]$
20.     endfor
21.     for  $i \leftarrow n-2+j$  downto  $j+1$  do step 2
22.          $x[i] \leftarrow b^{(1)}[i] / g^{(1)}[i]$
23.          $b^{(1)}[i-2] \leftarrow b^{(1)}[i-2] - x[i] \times h^{(1)}[i-2]$
24.     endfor
25.      $x[j] \leftarrow b^{(1)}[j] / g^{(1)}[j]$
26. endfor
27. end

Algoritma 9.4. terdiri dari 4 loop masing-masing dengan kompleksitas algoritma  $\Theta(n)$ . Berikut ini adalah *tracing* penerapan algoritma 9.4. terhadap sistem persamaan pada contoh 9.2. :



sublooping 21-24

$$i = 3 \quad x[3] = b[3] / g[3] = (220/11) / (550/33) = \boxed{1.200}$$

$$b[1] = b[1] - x[3] \times h[1] = 60/11 - 1.200 \times 20/11 = 36/11$$

instruksi 25 :

$$x[1] = b[1] / g[1] = (36/11) / (160/11) = \boxed{0.225}$$

looping paralel 16 – 28,  $j = 2$  :

sublooping 17-20

$$i = 2 : \quad g^{(1)}[4] = g^{(1)}[4] - (f^{(1)}[4] / g^{(1)}[2]) \times h^{(1)}[2]$$

$$= (141/7) - ((-5/7) / (75/7)) \times (-15/7) = 20$$

$$b^{(1)}[4] = b^{(1)}[4] - (f^{(1)}[4] / g^{(1)}[2]) \times b^{(1)}[2]$$

$$= (271/14) - ((-5/7) / (75/7)) \times 135/14 = 20$$

sublooping 21-24

$$i = 3 \quad x[4] = b[4] / g[4] = 20 / 20 = \boxed{1.000}$$

$$b[2] = b[2] - x[4] \times h[2] = 135/14 - 1.000 \times (-15/7) = 165/14$$

instruksi 25 :

$$x[2] = b[2] / g[2] = (165/14) / (75/7) = \boxed{1.100}$$

## 2.4. Speedup

Kompleksitas algoritma dapat juga dinyatakan melalui nilai total operasi floating point.

Untuk algoritma 9.3. nilai total operasi floating point adalah :

$$\sum_{i=1}^{n-1} 6 + \sum_{i=2}^{n-1} 3 + 1 = 9n - 8 \quad (9.9)$$

sedangkan untuk algoritma 9.4. adalah :

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2 + \sum_{i=2}^{n-1} 10 + 8 + \sum_{i=2}^{n-1} 6/2 + \sum_{i=1}^{n-2} 3/2 + 1 = 16.5n - 22 \quad (9.10)$$

sehingga speedup adalah :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n - 8}{16.5n - 20} = 0.545 \quad (9.11)$$

Jika paralelisasi juga dilakukan pada langkah 2-5, 6-11, dan 12-16 maka total operasi floating point algoritma 9.4 adalah :

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2/2 + \sum_{i=2}^{n-1} 10/2 + 8/2 + \sum_{i=2}^{n-1} 6/2 + \sum_{i=1}^{n-2} 3/2 + 1 = 10.5n - 18 \quad (9.12)$$

sehingga speedup adalah :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n - 8}{10.5n - 10} = 0.857 \quad (9.13)$$

Baik (9.11) maupun (9.12) adalah nilai speedup yang buruk ( $< 1.0$ ). Kedua nilai tersebut dihasilkan jika paralelisasi menggunakan 2 prosesor. Jika menggunakan 4 prosesor maka instruksi-instruksi yang dapat di-assign ke masing-masing prosesor adalah instruksi : 6-10,

12-15, dan, dengan sedikit perbedaan penanganan, langkah 16-25. Total operasi floating point dengan 4 prosesor adalah :

$$\sum_{i=1}^{n-1} 1 + \sum_{i=2}^{n-1} 4 + 2 + \sum_{i=2}^{n-1} 3/2 + \sum_{i=1}^{n-2} 2/2 + 1 = 7.5n - 14 \quad (9.14)$$

sehingga speedup adalah :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n - 8}{7.5n - 14} = 1.2 \quad (9.15)$$

Nilai (9.15) ini adalah nilai maksimum untuk paralelisasi algoritma 9.4.